Εξισώσεις

§ 2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Τι ονομάζουμε εξίσωση 2ου βαθμού;

Εξίσωση 2ου βαθμού με ένα άγνωστο ονομάζουμε κάθε εξίσωση που γράφεται ή μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$.

π.χ.

$2x^2+3x-5=0$, $x^2-3x=0$, $3x^2-12=0$

Τι ονομάζουμε εξίσωση 2ου βαθμού ελλιπής μορφής;

Εξίσωση 2ου βαθμού ελλιπής μορφής ονομάζεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και $\beta=0$ ή $\gamma=0$

π.χ.

$2x^2-10x=0$ ($\gamma=0$)

$2x^2-18=0$ ($\beta=0$)

Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού

Α) Εξισώσεις ελλιπής μορφής

- Αν $\beta=0$ τότε: $\alpha x^2+\gamma=0\Leftrightarrow \alpha x^2=-\gamma\Leftrightarrow x^2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$ και αυτή λύνεται κατά τα γνωστά.

  π.χ.

  $2x^2-18=0$

  $2x^2=18$

  $\dfrac{2x^2}{2}=\dfrac{18}{2}$

  $x^2=9$

  $x=\pm\sqrt{9}$

  $x=\pm 3$

  $x=-3$ ή $x=3$

- Αν $\gamma=0$ τότε: $\alpha x^2+\beta x=0\Leftrightarrow x(\alpha x+\beta)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\alpha x+\beta=0$ και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

  π.χ.

  $2x^2-10x=0$

  $x(2x-10)=0$

  $x=0$ ή $2x-10=0$

  $2x=10$

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

$$x = \frac{10}{2}$$

x=5

Παραδείγματα

1) Να επιλυθεί η εξίσωση: $4x^2 - 64 = 0$

Λύση:

$4x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow$

$4x^2 = 64 \Leftrightarrow$

$x^2 = 16 \Leftrightarrow$

$x = \pm 4$

2) Να επιλυθεί η εξίσωση: $5x^2 + 25 = 0$

Λύση:

$5x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$5x^2 = -25 \Leftrightarrow$

$x^2 = -5$

Αδύνατη

3) Να επιλυθεί η εξίσωση: $3x^2 - 9x = 0$

Λύση:

$3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow$

$3x(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = 3$

4) Να επιλυθεί η εξίσωση: $x^2 + x = 0$

Λύση:

$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x + 1 = 0$

$x = 0$ ή $x = -1$

Ασκήσεις

$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :
   i. $(x-3)\cdot(x+4)=0$ ii. $2\cdot(x-1)\cdot x=0$
   iii. $(1-3\psi)\cdot\psi=0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :
   i. $x^2-x=0$ ii. $3x^2=9x$
   iii. $3x^2+15x=0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :
   i. $x^2-25=0$ ii. $3x^2-27=0$
   iii. $x^2-12=0$ iv. $8x^2=64$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :
   i. $x^2+1=0$ ii. $3x^2+8=0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :
   i. $(x^2+x)\cdot(x^2-9)=0$ ii. $(x^2-4)\cdot(x^2+3)=0$
   iii. $x^3-4x=0$ iv. $x^3=x$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις
   Α) $x^2+2x=0$ Β) $2x^2-8=0$ Γ) $2x(x+3)=x^2$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις
   Α) $2x^2+5=0$ Β) $-2x^2+10x=0$ Γ) $2(x+4)=x^2+8$

Β) Εξισώσεις κανονικής μορφής

Για την επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ υπολογίζουμε πρώτα την ποσότητα $\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$ η οποία ονομάζεται **διακρίνουσα**. Μετά την επιλύουμε σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$
$\Delta>0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta=0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta<0$	Είναι αδύνατη στο R (καμία πραγματική)

π.χ.

$6x^2-5x+1=0$

$\alpha=6, \qquad \beta=-5, \qquad \gamma=1$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 1=25-24=1>0$

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 6}=\frac{5\pm 1}{12}=\begin{cases} x=\dfrac{5-1}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{5+1}{12}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Παραδείγματα

1) Να επιλυθεί η εξίσωση: $2x^2-5x+3=0$

Λύση:

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:

$\alpha=2 \quad \beta=-5 \quad \gamma=3$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$

Συνεπώς:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 1}{4}=\begin{cases} \dfrac{5+1}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5-1}{4}=\dfrac{4}{4}=1\end{cases}$$

2) Να επιλυθεί η εξίσωση: $x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}=0$

Λύση:

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:

$\alpha=1 \quad \beta=\sqrt{3}-1 \quad \gamma=-\sqrt{3}$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{3}-1\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=$

$=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3} \;=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1=$

$=\left(\sqrt{3}+1\right)^2>0.$

Δεν κάνουμε χρήση της ιδιότητας $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$

Συνεπώς:

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\cdot 1}=\frac{-\sqrt{3}+1\pm\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=$$

$$\rho_1=\frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ή

$$\rho_2 = \frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

3) Να εξετάσετε αν έχουν ή όχι πραγματικές ρίζες οι εξισώσεις:
Α. $x^2-6x+9=0$ Β. $2x^2-5x+3=0$ Γ. $3x^2+4x+2=0$

Λύση:
Α. Βρίσκουμε την διακρίνουσα
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$
Συνεπώς η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

Β. Βρίσκουμε την διακρίνουσα
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot2\cdot3=25-24=1>0$
Συνεπώς η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες.

Γ. Βρίσκουμε την διακρίνουσα
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(4)^2-4\cdot3\cdot2=16-24=-8<0$
Συνεπώς η εξίσωση **δεν** έχει πραγματικές ρίζες.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

   Α) $x^2-7x+10=0$ Β) $-x^2+2x-3=0$ Γ) $2x(x-3)=x^2-6$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

   Α) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$ Β) $x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

   Γ) $x^2-2(\sqrt{3}+1)x+4\sqrt{3}=0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

   Α. $x^2+3x-4=0$ Β. $x^2-x-2=0$

   Γ. $2x^2-x-3=0$ Δ. $2x^2+7x+3=0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

   Α. $x^2+3x-2=0$ Β. $3x^2+5x+1=0$

   Γ. $2x^2-6x+3=0$ Δ. $7x^2+4x+1=0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α. $7x^2 - 5x + 9 = 3(2x^2 + 1)$

Β. $(2x+1)^2 + 5(x+2) = 6$

Γ. $(x+1)^2 - 3x(x+2) = (x-1)^2$

Δ. $3x^2 - 3(x-1)(2x-1) = 2x+1$

Ε. $7x^2 - (3x-1)^2 = x+2$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

Α. $x - \frac{x^2 - 2}{2} = -3$

Β. $x^2 - \frac{2x-1}{6} = x - \frac{x^2}{3}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

Α. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

Β. $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

Γ. $x^3 - x^2 = x - 1$

Δ. $x^5 + x^4 = x + 1$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις :

Α. $9x^2+(5x-1)^2 = -18x$

Β. $\frac{x^2}{3} - \frac{x-2}{6} = \frac{6x+1}{4} - 2$

9. Να βρεθούν δύο αριθμοί που να έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -15.

10. Να λυθούν οι εξισώσεις :

Α. $(x-1)\cdot(x^2-9) = (x+3)\cdot(x^2-1)$

Β. $(5x-10)\cdot(x-1)^2 = (3x-6)\cdot(x^2-1)$